დარგი: მათემატიკა

აკაკი გირგვლიანი

წყლის ნაკადების დინამიკური მახასიათებლების რიცხვითი მოდელირება "ბრტყელი" წყალსაცავებისათვის

ნაშრომი ეხება შიდა წყალსაცავების დინამიკის მათემატიკურ მოდელირებას. მასში შემოთავაზებულია ორგანზომილებიანი რიცხვითი მოდელი, რომელსაც საფუძვლად უდევს წყლის მოძრაობისა და უწყვეტობის განტოლებების ვერტიკალის მიხედვით ინტეგრებით მიღებული სისტემა. ამოცანის ამოხსნა ხორციელდება სასრულ-სხვაობიანი მეთოდების გამოყენებით. მიღებული ალგორითმის აპრობაციისათვის ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტები საკმაოდ რთული რელიეფის მქონე მოდელური არისათვის.

საკვანძო სიტყვები: რიცხვითი მოდელირება, წყლის დინამიკა, სხვაობიანი სქემები, პროგრამირება.

შესავალი. წყლის რესურსების დაცვისა და რაციონალური გამოყენების პრობლემა საკმაოდ დიდი ხანია დგას დღის წესრიგში და დღეისათვის შესაბამისი სამეცნიერო წრეების მნიშვნელოვანი ნაწილი არის ამ საქმეში ჩართული. უნდა აღინიშნოს რომ ჩატარებული კვლევების დიდი ნაწილი ეძღვნება მსოფლიო ოკეანისა და მისი ნაწილების გლობალურ ფართომასშტაბიან პრობლემების შესწავლას (Марчук ... 1980; Sarkisyan 1997; Brayan 1979), ხოლო შიდა წყალსაცავებსა და მათ მიმდებარე რეგიონებში მიმდინარე ლოკალური ფიზიკური პროცესების თეორიული კვლევა თითქმის საწყის ეტაპზეა.

მცირე ზომის წყალსაცავის მნიშვნელობა ისეთ მასშტაბურ პრობლემებზე, როგორებიცაა ამინდის პროგნოზი და გლობალური დათბობა ნაკლებად შესამჩნევია, მაგრამ მიმდებარე რეგიონის ბუნებაზე, ეკონომიკური ინფრასტრუქტურის განვითარებასა და ეკოლოგიურ მდგომარეობაზე მისი ზეგავლენა საკმაოდ დიდია. ამიტომ შესაბამისი მახასიათებლების თეორიულად დასაბუთებული პროგნოზირება მნიშვნელოვან სამეცნიერო და პრაქტიკულ ინტერესს შეიცავს.

ძირითადი ნაწილი. ჩავთვალოთ, რომ განსახილველ წყალსაცავში წყლის სიღრმე გაცილებით ნაკლებია მის ჰორიზონტალურ ზომებზე, რაც ტბებისათვის უმეტეს შემთხვევაში დიდი სიზუსტით სრულდება. ასეთ შემთხვევაში წყლის მასის ვერტიკალური სტრატიფიკაცია თითქმის ერთგვაროვანია და სამგანზომილებიანი ამოცანის ნაცვლად შეიძლება განვიხილოთ ორგანზომილებიანი, ბრტყელი ამოცანა. კოორდინატთა სისტემა

მოვათავსოთ ისე, რომ ის დაემთხვეს წყლის თავისუფალ ზედაპირს, OX ღერძი მივმართოთ აღმოსავლეთისაკენ, ხოლო OY ღერძი კი - ჩრდილოეთისაკენ. აღვნიშნოთ $h(x, y)$ - ით ფუნქცია, რომელიც აღწერს ფსკერის რელიეფს, ხოლო $-\xi(x, y, t)$ - ით წყლის ზედაპირის გადახრა შეუშფოთებელი მდგომარეობიდან. ცხადია წყლის სიღრმე განსახილველ არეში აღიწერება ფუნქციით: $H(x, y, t)= h(x, y)+ \xi(x, y, t)$.

ამრიგად მივიღებთ ორგანზომილებიან $D(x, y)$ არეს, რომლის საზღვარი S - აღიწერება ფსკერის რელიეფისა და წყლის თავისუფალი ზედაპირის თანაკვეთით.

განსახილველ არეში წყლის მოძრაობისა და უწყვეტობის განტოლებები ვერტიკალის მიხედვით ინტეგრების შედეგად შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით (Girgvliani ... 2000; Гиргвлиани 1983):

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial uU}{\partial x}+u\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial vU}{\partial y}+v\frac{\partial U}{\partial y}\right)-fV+g\eta\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{F_x}{\eta},$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial uV}{\partial x}+u\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial vV}{\partial y}+v\frac{\partial V}{\partial y}\right)+fU+g\eta\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{F_y}{\eta}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial U\eta}{\partial x}+\frac{\partial V\eta}{\partial y}=0.$$

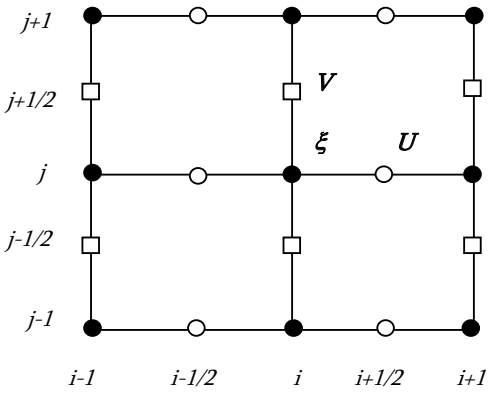
სადაც: u და v წყლის ნაკადის სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია შესაბამისად OX და OY ღერძების გასწვრივ, f-კორიოლისის პარამეტრია, g - თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაა დედამიწაზე, F_x და F_y ფუნქციები აღწერენ ქარის ხახუნის დაძაბულობას და დაძაბულობას ფსკერთან ხახუნის გამო. მათი პარამეტრიზაცია მოყვანილი იქნება მოგვიანებით. გარდა ამისა (1) სისტემაში მიღებულია აღნიშვნები: $\eta=\sqrt{H}$, $U=u\cdot\eta$, $V=v\cdot\eta$.

(1) სისტემის ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სასაზღვრო და საწყისი პირობებით:

$U = V =0,$ S - საზღვარზე,

$U=U^0,\ V=V^0,\ \xi=\xi^0$ როცა $t = t^0$. (2)

(1), (2) ამოცანის ამოხსნა მისი სირთულის გამო ანალიზური მეთოდებით ვერ ხერხდება, რის გამოც იძულებული ვართ შესაბამისი მიახლოებითი ამოხსნები ვეძებოთ რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით. ამისათვის განსახილველი უწყვეტი ორგანზომილებიანი $D(x, y)$ არე შევცვალოთ სხვა-ობიანით $D^h(x, y)$, რომელშიც მთელინდექსიანი (i, j) წერტილების პარალელურად განვიხილოთ შუალედურებიც $(i+1/2, j)$ და $(i, j+1/2)$ (ნახ. 1.).



ნახ. 1. სხვაობიანი ბადის სტრუქტურა.

საძიებელი უწყვეტი ფუნქციები U, V და ξ უნდა შევცვალოთ ბადური ფუნქციებით U^h, V^h და ξ^h, ამასთან ξ^h ფუნქცია მოთავსებულია ბადის მთელინდექსიან კვანძებში, ხოლო U^h და V^h ფუნქციები გადაადგილებულია ნახევარი ბიჯით შესაბამისად OX და OY ღერძების გასწვრივ.

საჭიროების შემთხვევაში ბადური ფუნქციების ინტერპოლაცია შუალედური კვანძებიდან მთელში და პირიქით ხორციელდება წრფივი ფორმულებით:

$$\varphi_k = \frac{\varphi_{k-1/2} + \varphi_{k+1/2}}{2}, \qquad \varphi_{k+1/2} = \frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}.$$

(1) დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის სივრცითი დიფერენციალური ოპერატორი A უნდა შევცვალოთ შესაბამისი სასრულ სხვაობიანი ოპერატორით A^h ისე, რომ ამ უკანასკნელმა შეინარჩუნოს საწყისი ოპერატორის ძირითადი ინტეგრალური მახასიათებლები. ზემოთაღწერილ ბადეზე ამის გაკეთება საკმაოდ მარტივია. საკმარისია ყველა სივრცითი კერძო წარმოებული შევცვალოთ შესაბამისი სასრულ-სხვაობიანი ანალოგით ცენტრალური სხვაობების გამოყენებით. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\nabla_x \varphi_{i,j} = \frac{\varphi_{i+1/2,j} - \varphi_{i-1/2,j}}{\Delta x}, \qquad \nabla_y \varphi_{i,j} = \frac{\varphi_{i,j+1/2} - \varphi_{i,j-1/2}}{\Delta y},$$

სადაც Δx და Δy სხვაობიანი ბადის ბიჯებია. მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{dU_{i+1/2,j}}{dt} + \frac{1}{2}\left[\nabla_x (uU)_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j}\nabla_x U_{i+1/2,j}\right] + \frac{1}{2}\left[\nabla_y (vU)_{i+1/2,j} + \right.$$

$$\left. + v_{i+1/2,j}\nabla_y U_{i+1/2,j}\right] - f\overline{V}_{i+1/2,j} + g\eta_{i+1/2,j}\nabla_x \xi_{i+1/2,j} = \frac{F^X_{i+1/2,j}}{\eta_{i+1/2,j}},$$

$$\frac{dV_{i,j+1/2}}{dt}+\frac{1}{2}\left[\nabla_x\left(uV\right)_{i,j+1/2}+u_{i,j+1/2}\nabla_x V_{i,j+1/2}\right]+\frac{1}{2}\left[\nabla_y\left(vV\right)_{i,j+1/2}+\right. \quad (3)$$

$$\left.+v_{i,j+1/2}\nabla_y V_{i,j+1/2}\right]-f\overline{U}_{i,j+1/2}+g\eta_{i,j+1/2}\nabla_y\xi_{i,j+1/2}=\frac{F^y_{i,j+1/2}}{\eta_{i,j+1/2}},$$

$$\frac{d\xi_{i,j}}{dt}+\nabla_x\left(U\eta\right)_{i,j}+\nabla_y\left(V\eta\right)_{i,j}=0,$$

სადაც: $\overline{U}_{i,j+1/2}=\dfrac{U_{i-1/2,j}+U_{i-1/2,j+1}+U_{i+1/2,j}+U_{i+1/2,j+1}}{4}$,

$$\overline{V}_{i+1/2,j}=\frac{V_{i,j-1/2}+V_{i,j+1/2}+V_{i+1,j-1/2}+V_{i+1,j+1/2}}{4}.$$

(3) სისტემის რეალიზაცია დროის მიხედვით შეიძლება განხორციელდეს, როგორც ცხადი სქემით, ასევე არაცხადი ან კრანკ-ნიკოლსონის სქემით. მართალია წრფივი სისტემების შემთხვევაში არაცხადი სქემები იძლევიან აბსოლუტური მდგრადობის გარანტიას და ამასთან კრანკ-ნიკოლსონის სქემით უზრუნველყოფილია მეორე რიგის აპროქსიმაცია თანაბარ ბადეზე, მაგრამ არაწრფივი განტოლებების შემთხვევაში ანალოგიური შეფასებების მიღება ჯერ-ჯერობით არ ხერხდება, ამასთან ერთად არაცხად სქემებს მივყავართ არითმეტიკული ოპერაციების რაოდენობის სოლიდურ ზრდამდე, რაც უარყოფითად აისახება ამოცანის ამოხსნის სისწრაფეზე. აქედან გამომდინარე მოცემულ ნაშრომში ალგორითმის რეალიზაცია დროის მიხედვით ხდება ცხადი სქემით, რაც იწვევს გარკვეულ შეზღუდვას დროითი ბიჯის მიმართ. ამ შემთხვევაში სხვაობიანი სქემის მდგრადობის უზრუნველსაყოფად უნდა დავიცვათ კურანტის ცნობილი პირობა:

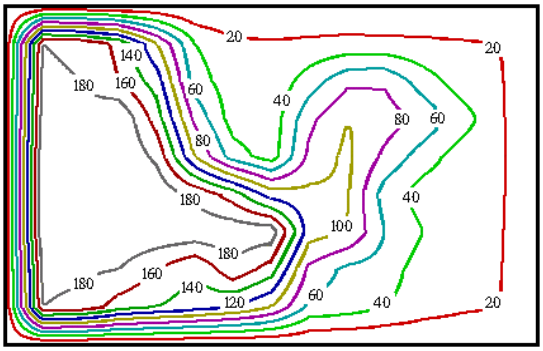
$$\frac{\Delta t}{\Delta L}<\frac{1}{\sqrt{2gh_{\max}}}\ ,\quad \text{სადაც}\ \ \Delta L=max(\Delta x,\Delta y).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ წყლის ნაკადების ძირითად მამოძრავებელ ძალას მოცემულ მოდელში – საწყისი მდგომარეობის გარდა– წარმოადგენს ატმოსფერული ქარის ზემოქმედება. ამიტომ თუ თვლას ვახორციელებთ მუდმივი ქარის ზემოქმედების ქვეშ, მაშინ გარკვეული დროის შემდეგ განსახილველ არეში სისტემა აუცილებლად მიაღწევს სტაციონალურ მდგომარეობას. აქედან გამომდინარე მოცემული მოდელის საშუალებით შეიძლება ვაწარმოოთ ორი ტიპის ამოცანის თვლა:

1. ამოცანა მუდმივი ქარის ზემოქმედების ქვეშ ნულოვანი საწყისი პირობებიდან სტაციონალური რეჟიმის დამყარებამდე.

2. არასტაციონალური ამოცანის თვლა რაიმე საწყისი მდგომარეობიდან რეალურ რეჟიმში მოქმედი ქარის პირობებში.

აღწერილი მოდელის საშუალებით ჩატარებული იქნა რიცხვითი ექსპერიმენტები მოდელური არისათვის რომლის ზომები (15 კმ და 10 კმ) ახლოსაა რეალურთან და რელიეფი საკმაოდ ზოგადია (ნახ. 2.). მოდელში



ნახ. 2. სათვლელი არის ფსკერის რელიეფი

გამოიყენებოდა პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობები: გრავიტაციული მუდმივა g=980 სმ/წმ^2; კორიოლისის პარამეტრი f = 0.95$_{10}$-04 წმ$^{-1}$; ფსკერზე ხახუნის დაძაბულობის ვექტორი $\vec{\tau}^1(\tau_x^1, \tau_y^1)$ გამოითვლება ფორმულებით:

$$\tau_x^1 = b \cdot \sqrt{u^2 + v^2} \cdot u, \quad \tau_y^1 = b \cdot \sqrt{u^2 + v^2} \cdot v, \quad \text{სადაც } b = 0{,}003;$$

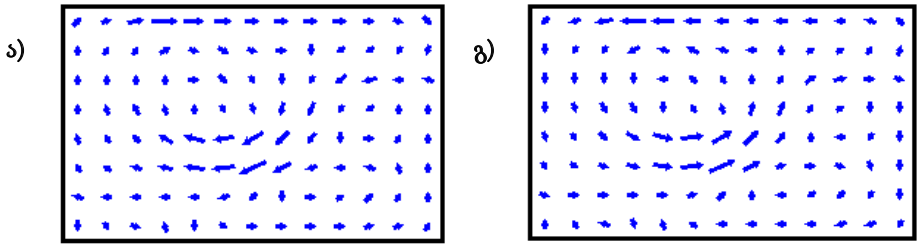
ატმოსფერული ქარის ხახუნის დაძაბულობის ვექტორი $\vec{\tau}^0(\tau_x^0, \tau_y^0)$ გამოითვლება ფორმულებით:

$$\tau_x^0 = b_1 \cdot \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \cdot W_x, \quad \tau_y^0 = b_1 \cdot \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \cdot W_y, \text{ სადაც } b_1 = 3{,}2_{10}\text{-}06.$$

წყლის მასების მთავარი მამოძრავებელ ძალას მოცემულ მოდელში წარმოადგენს ატმოსფერული ქარის ზემოქმედება. რიცხვითი ექსპერიმენტები მიმდინარეობდა სხვადასხვა მიმართულების ქარის ზემოქმედების შემთხვევაში სისტემის ნულოვანი (შეუშფოთებელი ბასეინი) მდგომარეობიდან კვაზი სტაციონალური რეჟიმის დამყარებამდე. წარმოდგენილ ყველა ექსპერიმენტში ქარის სიჩქარე ტოლია 10 მ/წმ-ის.

ნახ. 3.-ზე წარმოდგენილია თვლის შედეგები დასავლეთისა და აღმოსავლეთის ქარის ზემოქმედების შემთხვევაში თვლის დაწყებიდან 8 საათის შემდეგ. აღსანიშნავია, რომ თვლის დასაწყისისათვის დინების მიმართულება ემთხვევა ქარის მიმართულებას, მაგრამ დროთა განმავლობაში იზრდება გეოსტროფული ძალების მოქმედების მნიშვნელობა და თანდათან ფორმირდება წყლის მასების ცირკულაცია, რომელშიც საბოლოოდ რამდენიმე წრებრუნვა გამოიყოფა. 8 საათისათვის დინებათა კვაზისტაციონალური რეჟიმი დამყარებულია და შემდგომში არსებითი ცვლილება არ ხდება. სურათზე განსაკუთრებით გამოიყოფა ანტიციკლონური მიმართულების დინება განსახილველი არის ჩრდილო დასავლეთ ნაწილში (ნახ. 3ა.), რომლის ფარგლებშიც აღწევს დინების ნაკადის სიჩქარე მაქსიმალურ მნიშვნელობას 7-8 სმ/წმ.

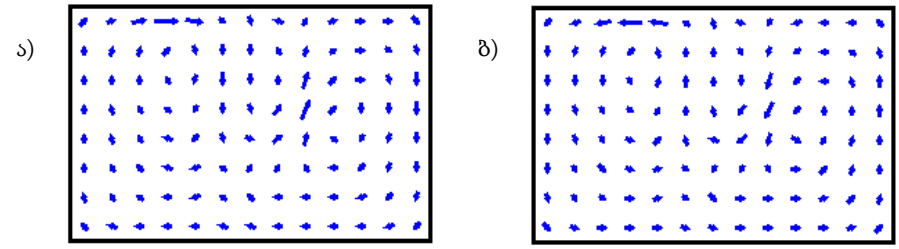
იმავე სიძლიერის აღმოსავლეთის ქარის შემთხვევაში მიღებული დინებათა სქემა ანალოგიურია, მხოლოდ ნაკადების მიმართულებები იცვლება საპირისპიროთი (ნახ. 3ბ.).



ნახ 3. დინებათა სისტემა: ა) დასავლეთის ქარის ზემოქმედებისას - U_{max}=7,24 სმ/წმ; ბ) აღმოსავლეთის ქარის ზემოქმედებისას - U_{max}=7,23

ნახ. 4.-ზე წარმოდგენილია ჩრდილოეთისა და სამხრეთის ქარის ზემოქმედების შემთხვევაში მიღებული სტაციონალურ დინებათა სქემები.

როგორც ვხედავთ ამ შემთხვევაშიც წყლის ნაკადების ცირკულაცია ერთმანეთის მსგავსია მხოლოდ მიმართულებებია საპირისპირო.



ნახ. 4. დინებათა სისტემა: ა) ჩრდილოეთის ქარის ზემოქმედებისას - U_{max}=7,52 სმ/წმ და ბ) სამხრეთის ქარის ზემოქმედებისას - U_{max}=7,56 სმ/წმ

დასკვნა. ნაშრომში შემოთავაზებული მოდელი ხარისხობრიბად და რაოდენობრივად კარგად აღწერს რეალურ გარემოში მიმდინარე ფიზიკურ პროცესს და ის შეიძლება წარმატებით იქნას გამოყენებული შესაბამისი ტიპის წყალსაცავების დინამიკური მახასიათებლების ცვლილების პროგნოზირებისათვის. მოცემული მოდელის საშუალებით შემდგომში შესაძლებელია ისეთი ამოცანების გადაწყვეტა, როგორიცაა გარემოს რესურსების რაციონალური გამოყენება და ეკოლოგიურ მდგომარეობის პროგნოზირება.

ლიტერატურა:

Brayan 1979: Brayan K. Models of the ocean circulation and the global heat balance. WWO, GARP Publication. v. 2, N 22, Geneva, 1979.
Girgvliani ... 2000: Girgvliani A.G., Marri E. Numerical modeling of the dynamics of eastern Black Sea coast zone with the consideration of mobile coastline. J of Georgian Geophys. Soc. vol 5B, 2000.
Sarkisyan 1997: Sarkisyan A. S. The diagnostic calculations of the large-scale oceanic circulation. The Sea. v. 6, 1997.
Гиргвлиани 1983: Гиргвлиани А.Г. О численном моделировании задач мелкой воды. Препринт № 454. Новосибирск. 1983.
Марчук ... 1980: Марчук Г. И. , Кочергин В. П. И др. Математические модели циркулации в океане.Новосибирск: Наука, 1980.