ანალიზი

ერთეულოვან წრეში ანალიზური ფუნქციების მიმდევრობის სასაზღვრო მნიშვნელობების კრებადობის შესახებ

გიორგი თეთვაძე,
ლამარა ციბაძე,
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი, საქართველო
lamara.tsibadze@atsu.edu.ge

ცნობილია, რომ (Голузин, 1966, Коллингвуд ..., 1971, Привалов,1950) საზოგადოდ არ არსებობს კავშირი ერთეულოვან წრეში ანალიზურ ფუნქციათა (f_n (z))_(n=1)^(+∞) მიმდევრობის კუთხურ სასაზღვრო მნიშვნელობებს და მიმდევრობის ზღვრული f(z) ფუნქციის კუთხურ სასაზღვრო მნიშვნელობებს შორის, მაშინაც კი, როცა მიმდევრობის წევრები მრავალწევრებია. ნაშრომში დადგენილია პირობები, რომლის შესრულების შემთხვევაში მყარდება კავშირი ერთეულოვან წრეში ანალიზურ ფუნქციათა მიმდევრობის კუთხურ სასაზღვრო მნიშვნელობებსა და ზღვრული ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობებს შორის.

საკვანძო სიტყვები: *ანალიზური ფუნქცია, კუთხური სასაზღვრო მნიშნვნელობა.*

$\mathbb{C}$-თი აღვნიშნოთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო $\mathcal{K}(z_0,\delta)$ -თი წრე ცენტრით z_0 წერტილში და რადიუსით $\delta>0$, ე.ი.

$$\mathcal{K}(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta,\ z\in\mathbb{C}\},$$

$$\mathcal{D}=\mathcal{K}(0,1)=\{z:|z|<1,\ z\in\mathbb{C}\},$$

$$\mathrm{T}=\{z:|z|=1,\ z\in\mathbb{C}\}.$$

$\Delta(\theta)$-თი აღვნიშნოთ სამკუთხედი, რომელიც მიიღება ერთეულოვან წრეში ორი ქორდით საერთო წვეროთი $e^{i\theta}$ წერტილში. $\mathcal{M}$ სიმრავლის ჩაკეტვა აღვნიშნოთ $\overline{\mathcal{M}}$-თი.

ერთეულოვან წრეში ანალიზური ფუნქციის კუთხის სასაზღვრო მნიშვნელობა ეწოდება ზღვარს:

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta}\\ z\epsilon\Delta(\theta)}} f(z) = \lim_{z \rightrightarrows e^{i\theta}} f(z)$$

ა. ხინჩინისა და ა. ოსტროვსკის მიერ (Голузин, 1966, Коллингвуд ..., 1971, Привалов,1950) დამტკიცებულ იქნა შემდეგი

თეორემა: ვთქვათ ერთეულოვან წრეში ანალიზურ ფუნქციათა $(f_n(z))_{n=1}^{+\infty}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $|z| < 1$ წრეში, ამასთან, აკმაყოფილებს პირობებს:

1. არსებობს ისეთი C>0, რომ

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ |f_n(z\,e^{i\theta})| d\theta \leq C$$

2. ანალიზური $f_n(z), (n = 1,2,..)$ ფუნქციების კუთხური სასაზღვრო მნიშვნელობები $(f_n(\,e^{i\theta}))_{n=1}^{+\infty}$ ზომით კრებადია რაიმე დადებითი ზომის $e \subset \mathrm{T}$ სიმრავლეზე. $\left(f_n(z)\right)_{n=1}^{+\infty}$ ფუნქციათა მიმდევრობა თანაბრად კრებადია წრეში $|z| < 1$ $f(z)$ ფუნქციისკენ, მაშინ $(f_n(\,e^{i\theta}))_{n=1}^{+\infty}$ მიმდევრობა ზომით კრებადია e სიმრავლეზე $f(\,e^{i\theta})$ ფუნქციისკენ, სადაც

$$f\left(\,e^{i\theta}\right) = \lim_{z \rightrightarrows e^{i\theta}} f(z).$$

ქვემოთ, ჩვენ მიერ დამტკიცებული იქნება ანალოგიური ტიპის შემდეგი:

თეორემა. ვთქვათ, მოცემულია ერთეულოვან წრეში ანალიზურ ფუნქციათა $\left(f_n(z)\right)_{n=1}^{+\infty}$ მიმდევრობა, ამათან თითქმის ყოველი θ-სთვის, $\theta\epsilon E \subset [0; 2\pi), \mu E > 0,$

$$\lim_{z \rightrightarrows e^{i\theta}} f_n(z) = f_n\left(\,e^{i\theta}\right) \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n\left(\,e^{i\theta}\right) = f\left(\,e^{i\theta}\right) \qquad (2).$$

მაშინ შემდეგი პირობები ეკვივალენტურია:

(I) $\left(f_n(z)\right)_{n=1}^{+\infty}$ თანაბრად კრებადია $|z|<1$ წრის შიგნით $f(z)$ ფუნქციისკენ და თითქმის ყველა θ-სთვის, $\theta\epsilon E$

$$\lim_{z\hat{\to} e^{i\theta}} f\,(z)=f\left(\,e^{i\theta}\right) \qquad (3).$$

(II) A) ფუნქციათა მიმდევრობა $\left(f_n(z)\right)_{n=1}^{+\infty}$ კომპაქტურია ერთეულოვან წრეში $|z|<1$;

B) $\left(f_n(z)\right)_{n=1}^{+\infty}$-ის ყოველ კრებად

$$\left(f_{n_k}(z)\right)_{k=1}^{+\infty}, \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z)=f(z)$$

ქვემიმდევრობას აქვს თვისება, $\forall\Delta\theta, \forall\varepsilon\epsilon 0, \forall N$ ნატურალური რიცხვისთვის თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე, არსებობს $\delta>0, K>N$, ისეთი, რომ

$$\left|f_{n_k}(z)-f_n(z)\right|<\varepsilon, \text{სადაც } z\epsilon\overline{\Delta(\theta)}\cap k\left(\,e^{i\theta};\,\delta\right).$$

დამტკიცება: ჯერ ვაჩვენოთ, რომ (I)=>(II). აღვნიშნოთ (E_1)-ით ყველა იმ $\theta\in E$ წერტილების ერთობლიობა, რომელთათვისაც სრულდება (1), (2) და (I) პირობები. ცხადია, $\mu E_1=\mu E>0$, ამასთან (I)-ის ძალით $\{f_n(z)\}$ კომპაქტურია ერთეულოვან წრეში $|z|<1$.

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი $\theta\in E_1$ და $\Delta(\theta)$ დავაფიქსიროთ, მაშინ (3)-ის ძალით მივიღებთ

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta}\\ z\epsilon\overline{\Delta(\theta)}}} f\,(z)=f\left(\,e^{i\theta}\right).$$

აქედან იმის გამო, რომ $(f_n(z))_{n=1}^{+\infty}$ მიმდევრობა კრებადია $\overline{\Delta(\theta)}$-ზე, არცელას თეორემის ძალით მივიღებთ: $(f_n(z))_{n=1}^{+\infty}$ ფუნქციათა მიმდევრობა კვაზი-თანაბრად კრებადია $f(z)$ ფუნქციისკენ $\overline{\Delta(\theta)}$-ზე, ე.ი. $\forall\epsilon>0, \forall N$ იარსებებს ისეთი

$$K(z_1, \delta_1), K(z_2, \delta_2), \dots, K(z_m, \delta_m)$$

წრეები და $n_1 > N, n_2 > N, \dots, n_m > N$, რომ

$$\left|f_{n_j}(z) - f(z)\right| < \epsilon, z\epsilon\overline{\Delta(\theta)} \cap K\left(z_j, \delta_j\right), \quad (j = \overline{1; m}) \quad (4)$$

ცხადია, იარსებებს ისეთი j_0, რომ $e^{i\theta} \epsilon K\left(z_{j_0}, \delta_{j_0}\right)$. ავიღოთ $\delta > 0$, ისეთი მცირე, რომ $K(e^{i\theta}; \delta) \subset K\left(z_{j_0}, \delta_{j_0}\right)$. უკანასკნელიდან და (4)-დან მივიღებთ

$$\left|f_{n_j}(z) - f(z)\right| < \epsilon, \forall z\epsilon K(e^{i\theta}; \delta) \cap \overline{\Delta(\theta)}.$$

ამით დამტკიცდა, რომ (I)=>(II).

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (II)=>(I). აღვნიშნოთ (E_2)-ით ყველა იმ $\theta \in E$ წერტილთა ერთობლიობა, რომელთათვისაც სრულდება (1), (2) და (II) პირობები. ცხადია, $E_2 \subset E$ და $\mu E_2 = \mu E = 0$.

$\{f_n(z)\}$-ს კომპაქტურობის გამო, მისგან გამოიყოფა ისეთი $(f_{n_k}(z))_{k=1}^{\infty}$ ქვემიმდევრობა, რომელიც თანაბრად კრებადი იქნება ერთეულოვანი წრის შიგნით ანალიზური $f(z)$ ფუნქციისკენ. ახლა ავიღოთ ნებისმიერი ფიქსირებული $\theta\epsilon E_2$ და მისთვის დავაფიქსიროთ ნებისმიერად არჩეული $\Delta(\theta)$. (2) პირობის ძალით $\forall\epsilon > 0$ რიცხვისთვის იარსებებს ისეთი $N(\epsilon) > 0$ რიცხვი, რომ

$$\left|f_{n_k}\left(e^{i\theta}\right) - f\left(e^{i\theta}\right)\right| < {}^{\epsilon}/_{3}, \quad \forall k > N(\epsilon). \quad (5)$$

(II) პირობის B) პუნქტის ძალით იარსებებს ისეთი $\delta > 0$ და $k_0 > N(\epsilon)$, რიცხვი, რომ

$$\left|f_{n_{k_0}}(z) - f_{n_{k_0}}\left(e^{i\theta}\right)\right| < {}^{\epsilon}/_{3}, \quad \forall z\epsilon\overline{\Delta(\theta)} \cap k(e^{i\theta}; \delta_0). \quad (6)$$

1) პირობის ძალით იარსებებს ისეთი $0 < \delta_0 < \delta$, რომ

$$\left|f_{n_{k_0}}(z) - f_{n_{k_0}}\left(e^{i\theta}\right)\right| < {}^{\epsilon}/_{3}, \quad \forall z\epsilon\overline{\Delta(\theta)} \cap K(e^{i\theta}; \delta_0).$$

აქედან (5) და (6)-ს გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\left|f(z) - f\left(e^{i\theta}\right)\right| \leq \left|f(z) - f_{n_0}(z)\right| + \left|f_{n_{k_0}}(z) - f_{n_k}\left(e^{i\theta}\right)\right| + \left|f_{n_{k_0}}(z) - f\left(e^{i\theta}\right)\right|$$
$$< \varepsilon,$$

$$\forall z\epsilon\overline{\Delta(\theta)} \cap K(e^{i\theta}; \delta_0).$$

ϵ-ის ნებისმიერობის გამო მივიღებთ

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta} \\ z\epsilon\overline{\Delta(\theta)}}} f(z) = f\left(e^{i\theta}\right).$$

უკანასკნელი ტოლობიდან θ -ს და $\Delta(\theta)$-ს ნებისმიერობის გამო, მივიღებთ:

$$\lim_{z\rightrightarrows e^{i\theta}} f(z) = f\left(e^{i\theta}\right). \qquad (7)$$

თეორემის დამტკიცებისთვის საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ $(f_n(z))_{n=1}^{+\infty}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია ერთეულოვანი წრის შიგნით f ფუნქციისკენ. დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ $(f_n(z))_{n=1}^{+\infty}$ მიმდევრობა არ არის კრებადი f ფუნქციისკენ. $\{f_n(z)\}$ ფუნქციების კომპაქტურობის გამო იარსებებს ისეთი $(f_{n_j}(z))_{j=1}^{+\infty}$ ქვემიმდევრობა, რომელიც თანაბრად კრებადი იქნება ერთეულოვანი წრის შიგნით რაიმე $\varphi(z)$ ფუნქციისკენ. ამასთან,

$$\varphi \neq f. \qquad (8)$$

თუ გავიმეორებთ ზემოთაღნიშნულ მსჯელობას $(f_{n_j}(z))_{j=1}^{+\infty}$ მიმდევრობისთვის და $\varphi(z)$ ფუნქციისთვის, მივიღებთ

$$\lim_{z\rightrightarrows e^{i\theta}} \varphi(z) = f\left(e^{i\theta}\right). \qquad (9)$$

ლუზინი-პრივალოვის (Голузин, 1966, Коллингвуд ..., 1971, Привалов,1950) ერთადერთობის თეორემის ძალით (7) და (9)-დან მივიღებთ

$$\varphi \equiv f, \ \forall z\epsilon\mathcal{D}$$

რაც ეწინააღმდეგება (8) პირობას. მიღებულ წინააღმდეგობამდე მიგვიყვანა დაშვებამ, რომ $(f_n(z))_{n=1}^{+\infty}$ არ არის კრებადი $f(z)$ ფუნქციისკენ ერთეულოვან წრეში. მაშასადამე, $(f_n(z))_{n=1}^{+\infty}$ მიმდევობა კრებადია $f(z)$ ფუნქციისკენ , როცა $|z| < 1$.

$\{f_n(z)\}_{n=1}^{+\infty}$-ის კომპაქტურობის ძალით $(f_n(z))_{n=1}^{+\infty}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადი იქნება $f(z)$ ფუნქციისკენ ერთეულოვანი წრის შიგნით. ამასთან,

$$\lim_{z\rightrightarrows e^{i\theta}} f(z) = f\left(e^{i\theta}\right).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ლიტერატურა:

Голузин, 1966: Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. 1966 г.

Коллингвуд ..., 1971: Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. Изд-во: М.: Мир, 1971.

Привалов, 1950: Привалов И. И. Граничные своиства аналитических функций. М. 1950.