ანალიზი

რადონის წირით შემოსაზღვრული არეების კონფორმული ასახვები

ლელა ზივზივაძე-ჯაფარიძე,
ერეკლე ჯაფარიძე
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი, საქართველო
lelajaparidze21@gmail.com

ცნობილია, რომ კონფორმულ გადასახვათა თეორიაში მიმართავენ ფრედჰოლმის ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდს, როგორც გადამსახავი ფუნქციის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხების გამოსაკვლევად, ასევე განსაკუთრებით, ასეთი ფუნქციის ეფექტურად ან მიახლოებით ასაგებად. სტატიაში განხილულია ინტეგრალური განტოლება, რომელსაც უწყვეტ ფუნქციათა კლასში გააჩნია ერთადერთი უწყვეტი ამონახსნი. ამ ამონახსნის საშუალებით იგება რადონის წირით შემოსაზღვრული სასრული ცალადბმული არის ერთეულოვან წრეზე კონფორმულად გადამსახავი ანალიზური ფუნქცია. განიხილება აგრეთვე მარტივი წრფევადი ჩაკეტილი რადონის წირის მიერ განსაზღვრული უსასრულო გარე არის კონფორმული ასახვა ერთეულოვანი წრის გარე არეზე.

საკვანძო სიტყვები: *კონფორმული ასახვა, რადონის წირი, ინტეგრალური განტოლება, არე.*

დავუშვათ Γ არის მარტივი წრფევადი ჩაკეტილი წირი, რომლის განტოლებაა: $t=t(s)=x(s)+iy(s)$, $0\leq s\leq|\Gamma|$, სადაც s არის Γ წირის შესაბამისი t წერტილის რკალური აბსცისა, ხოლო $|\Gamma|$–წირის სიგრძეა. Γ წირის თითქმის ყველა წერტილში არსებობს წირის მხები. აღვნიშნოთ $\Theta(s)$-ით კუთხე Γ წირის $t(s)$ წერტილში გავლებულ მხებსა და Ox ღერძს შორის. თუ $\Theta(s)$ კუთხე ნებისმიერ $s\epsilon[0;|\Gamma|]$ წერტილში შეიძლება განისაზღვროს სიზუსტით 2π–ს ჯერად შესაკრებამდე ისე, რომ $\Theta(s)$ ფუნქციას გააჩნდეს შემოსაზღვრული ვარიაცია $[0;|\Gamma|]$ სეგმენტზე, მაშინ Γ წირს ეწოდება

რადონის წირი. რადონის წირის იმ წერტილების რაოდენობა, რომლებშიც $\Theta(s)$ ფუნქციის ნახტომის აბსოლუტური მნიშვნელობა აღემატება π–ს, იქნება სასრული. ამ ნახტომებისგან შეიძლება განვთავისუფლდეთ, თუ ასეთ წერტი–ლებში ხელახლა დამატებით განვსაზღვრავთ Θ კუთხეს. ამრიგად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $\Theta(s)$ ფუნქციის $h(s)$ ნახტომების აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება π–ს. იმ წერტილებს, რომლებშიც $h(s)=\pi$ ეწოდებათ Γ წირის უკუქცევის(წაწვეტების) წერტილები, და მათი რაოდენობა სასრულია წირზე. თუ $h(s)<\pi$, მაშინ შესაბამის წერტილს ეწოდება კუთხური წერტილი. რადონის წირზე ასეთ წერტილთა სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია. მიუხედავად ამისა კუთხური წერტილების სიმრავლე შეიძლება ყველგან მკვრივი იყოს Γ წირზე.

დავუშვათ, Γ რადონის მარტივი, ჩაკეტილი წირია. Γ^{+} იყოს სასრული არე, რომელიც შემოსაზღვრულია Γ წირით, ხოლო Γ^{-} –უსასრულო არე შემოსაზღვრული Γ წირით. რადო–ნის მარტივი წირისათვის შემდეგი განტოლებებიდან (იხ. Радон 1946)

$$\cos\psi(s;\sigma)=\frac{x(\sigma)-x(s)}{|t(\sigma)-t(s)|}, \qquad \sin\psi(s;\sigma)=\frac{y(\sigma)-y(s)}{|t(\sigma)-t(s)|}$$

განისაზღვრება კუთხის ფუნქცია $\psi(s;\sigma)$, $s;\sigma\in[0;|\Gamma|]$, რომელსაც თითოეული ცვლადის მიმართ გააჩნია შემოსაზღვრული ვარიაცია და ეს ვარიაცია თანაბრად შემოსაზღვრულია მეორე ცვლადის მიმართ.

განვიხილოთ შემდეგი სახის ინტეგრალური განტოლება

$$f(\sigma)+\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma} f(s)d_s\psi(\sigma;s)\equiv f+T(f)=\varphi(\sigma) \qquad (1)$$

ამ განტოლების შესახებ ცნობილია, რომ (Данилюк 1975) მას Γ წირზე უწყვეტ ფუნქციათა კლასში, ნებისმიერი უწყვეტი φ ფუნქციისათვის გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

ცნობილია, რომ კონფორმულ გადასახვათა თეორიაში მიმართავენ ფრედჰოლმის ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდს, როგორც გადამსახავი ფუნქციის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხების გამოსაკვლევად, ასევე, ასეთი ფუნქციის ეფექტურად ან მიახ–ლოებით ასაგებად. ჩვენი ამოცანაა Квеселава 1961–ში გადმოცემული მეთოდების საშუალებით ავაგოთ ფუნქციები, რომლებიც განახორციელებენ იმ არეების კონფორმულ გადასახვებს, რომლებიც შემოსაზღვრული არიან რადონის წირებით.

დავუშვათ Γ რადონის ჩაკეტილი წირია. ჩვენი მიზანია ავაგოთ ფუნქცია

$$\omega = f(z); \qquad f(0) = 0, \qquad f'(0) > 0$$

რომელიც ურთიერთცალსახად და კონფორმულად ასახავს Γ^+ არეს $D = \{\omega : |\omega| < 1\}$ წრეზე.

ასეთი ფუნქცია ლიაპუნოვის ტიპის გლუვი წირებისათვის აგებულია ნაშრომში (Квеселава 1961), რომელშიც გადმოცემული მეთოდების გამოყენებით მტკიცდება, რომ სამართლიანია თეორემა: ფუნქცია

$$\omega = f(z) = z \cdot \exp\left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(t)\,dt}{t - z} + ic \right\}$$

სადაც Γ წირზე უწყვეტი μ ფუნქცია წარმოადგენს (1) ტიპის განტოლების ერთადერთ ამონახსნს, ხოლო c მუდმივი განისაზღვრება ტოლობით

$$c = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(t)\,d\rho}{\rho},$$

სადაც ρ=|t|, ურთიერთცალსახად და კონფორმულად ასახავს რადონის Γ წირით შემოსაზ–ღვრულ Γ^{+} არეს ერთეულოვან წრეზე ისე , რომ

$$f(0)=0, f^{'}(0)>0$$

და Γ–ს არ გააჩნია უკუქცევის წერტილები.

განხილულია ასევე უსასრულო არის კონფორმულად გადასახვის ამოცანაც. კერძოდ საჭიროა მოვძებნოთ $\omega=\varphi(z)$ ფუნქცია, რომელიც ურთიერთცალსახად და კონფორმულად ასახავს Γ^{-} არეს $G=\{\omega:|\omega|>1\}$ არეზე. ამასთან მოითხოვება, რომ $\varphi(\infty)=\infty$ და ნამდვილი ღერძის მიმართულება არასაკუთრივ წერტილში დარჩეს უცვლელი. ნაჩვენებია, რომ ასეთი ტიპის φ ფუნქციას აქვს სახე:

$$\omega=\varphi(z)=az\cdot\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(t)dt}{t-z}\right\},$$

სადაც Γ წირზე უწყვეტი μ ფუნქცია წარმოადგენს

$$f(\sigma)-\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}f(s)d_{s}\psi(\sigma;s)+\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}f(s)ds=-\ln|t|$$

ინტეგრალური განტოლების ერთადერთ ამონახსნს, a მუდმივი განისაზღვრება ტოლობით

$$a=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\mu(s)ds\right\}$$

ინტეგრალი Γ–ზე აიღება იმ მიმართულებით, რომლისთვისაც არე რჩება ხელმარცხნივ და Γ წირს არ გააჩნია უკუქცევის წერტილები.

ლიტერატურა:

Данилюк 1975: Данилюк И.И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости. Москва «Наука» 1975.

Квеселава 1961: Квеселава Д.А. О применении интегральных уравнений в теории конформных отоб-ражений. АН. ГССР-Труды вычислительного центра. Т.2. 1961.

Радон 1946: Радон И. О краевых задачах для логарифмического потенциала. УМН. 1. №3–4, 1946.