მათემატიკური ფიზიკა

ზენერის განზოგადოებული სხეულის პირდაპირი და შებრუნებული თანაფარდობები, როცა განმსაზღვრელი თანაფარდობა შეიცავს წილადური რიგის წარმოებულს რიმან-ლიუვილის აზრით

თემურ სურგულაძე
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ქუთაისი, საქართველო
teimuraz.surguladze@atsu.edu.ge

ნაშრომში განხილულია ზენერის განზოგადოებული სხეული, როცა განმსაზღვრელი თანაფარდობა შეიცავს წილადური რიგის წარმოებულს რიმან – ლიუვილის აზრით. კინემატიკური და დინამიკური თანაფარდობების დახმარებით ჩაწერილია განმსაზღვრელი თანაფარდობა ზენერის განზოგადოებული სხეულისათვის. გრინის წილადური ფუნქციისა და წილად – ექსპონენციალური ფუნქციის დახმარებით მიღებულია პირდაპირი და შებრუნებული თანაფარდობები,ზენერის განზოგადოებული სხეულისათვის. მიღებულია ცოცვადობისა და რელაქსაციის ფუნქციების გამოსახულებები. ნაჩვენებია, რომ თუ მოდელი არ შეიცავს ზამბარას, ე.ი. თუ მოდელში ზამბარა შეცვლილია წილადური რიგის ელემენტით, მაშინ მყისიერი წაგრძელებისათვის საჭიროა ძალის უსასრულო მნიშვნელობა. 2010 Mathematics Subject Classification: 26A33.

საკვანძო სიტყვები: *წილადური რიგის წარმოებული, ზენერის განზოგადოებული სხეული, ცოცვადობისა და რელაქსაციის ფუნქცია.*

რ. კოელერმა 1984 წელს (Koeller 1984: 299-307) შემოიღო წილადური აღრიცხვის ელემენტის ცნება.

განსაზღვრება1: *წილადური აღრიცხვის ელემენტი ეწოდება ობიექტს, რომლის განმსაზღვრელი თანაფარდობა ჩაიწერება სახით*

$$\sigma(t,x)=E\eta^{\beta}D^{\beta}e(t,x),\quad 0\le\beta\le1 \qquad (1)$$

სადაც $\sigma(t,x)$ - თი აღნიშნულია დაძაბულობა, ხოლო $e(t,x)$ - თი კი დეფორმაცია. (1) ფორმულაში D^{β} სიმბოლოთი აღნიშნულია წილადური რიგის წარმოებული რიმან - ლიუვილის აზრით.

წილადური რიგის წარმოებული, რიმან-ლიუვილის აზრით, განისაზღვრება შემდეგნაირად (Podlubny 1999).

განსაზღვრება 2: *ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნახევრადღია $(a,b]$ ინტერვალზე, და ვთქვათ $\alpha > 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის α რიგის წილადური ინტეგრალი $x \in (a,b]$ წერტილში განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით*

$$ {}_aD_x^{-\alpha} f(x) = J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \qquad (2) $$

ამ ფორმულაში Γ - თი აღნიშნულია ეილერის გამა ფუნქცია

$$ \Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (3) $$

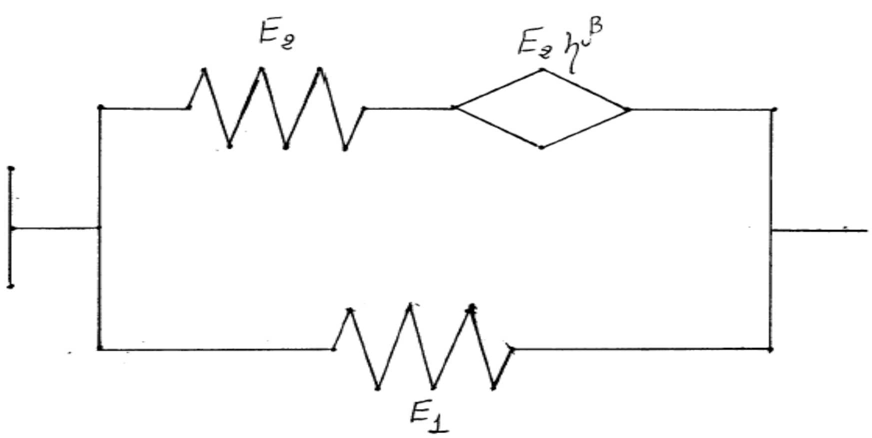
ვთქვათ $0 \le m-1 < \alpha \le m,\ m = 1,2,3,\cdots$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის α რიგის წილადური რიგის წარმოებული $x \in (a,b]$ წერტილში განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = D^\alpha f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-m}} \right] \quad (4) $$

ზენერის განზოგადოებული სხეული მიიღება თუ მაქსველის განზოგადოებულ სხეულს პარალელურად შევაერთებთ ზამბარასთან (Сургуладзе 2001: 40-43).

ზენერის განზოგადოებული სხეული ნაჩვენებია 1. ნახაზზე.

ზენერის განზოგადოებული სხეული



ნახაზი 1

როგორც ნახაზიდან ჩანს, კინემატიკური და დინამიკური სტრუქტურული თანაფარდობები ზენერის განზოგადოებული სხეულისათვის შეგვიძლია ჩავწეროთ სახით

$$\begin{cases} e_1 = e_2 = e \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \\ \sigma_1 = Ee_1 \\ D^{\beta} e_2 = \dfrac{1}{E}\left(D^{\beta} + \dfrac{1}{\eta^{\beta}} \right) \sigma_2 \end{cases} \qquad (5)$$

ამ ფორმულებში e_1 არის დეფორმაცია ზამბარაში, e_2 არის მაქსველის განზოგადოებული სხეულის დეფორმაცია, e – ზენერის განზოგადოებული სხეულის დეფორმაციაა, σ_1 – ზამბარის დაძაბულობაა, σ_2 – მაქსველის განზოგადოებული სხეულის დაძაბულობაა, σ – ზენერის განზოგადოებული სხეულის დაძაბულობაა.

(5) ფორმულის მეოთხე თანაფარდობა არის განმსაზღვრელი თანაფარდობა მაქსველის განზოგადოებული სხეულისათვის (Сургуладзе 2001: 40-43).

(5) ფორმულის პირველი, მეორე და მესამე თანაფარდობებიდან ვღებულობთ

$$\sigma_2 = \sigma - \sigma_1 = \sigma - Ee_1 \qquad (6)$$

თუკი (6) თანაფარდობას ჩავსვამთ (5)-ს მეოთხე თანაფარდობაში და ვისარგებლებთ წილადური რიგის წარმოებულის წრფივობით მივიღებთ

$$\frac{1}{\eta^{\beta}} \mathcal{Э}_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}} \right) \left[\left(E_1 + E_2 \right) \eta^{\beta} D^{\beta} + E_1 \right] e(t) =$$

$$\frac{1}{\eta^{\beta}} \mathcal{Э}_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}} \right) \left[\left(E_1 + E_2 \right) \eta^{\beta} \left(I_{\alpha}^{*} \right)^{-1} + E_1 \right] e(t)$$

ცნობილია, რომ (Podlubny 1999)

$$P = aD^{\beta} + b, 0 < \beta < 1 \qquad (8)$$

წილადური რიგის დიფერენციალური ოპერატორისათვის გრინის ფუნქციას აქვს სახე

$$G_P(t) = \frac{1}{a} t^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(-\frac{b}{a} t^{\beta} \right) \qquad (9)$$

სადან $E_{\alpha,\beta}(z)$ არის მიტტაგ-ლეფლერის ფუნქცია (Podlubny 1999; Gorenflo .... 2014)

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0; \beta > 0$$

ამ ფორმულაში Γ არის ეილერის გამა ფუნქცია.

მაშასადამე $P = \eta^{\beta} D^{\beta} + 1$ ოპერატორის გრინის ფუნქციას აქვს სახე

$$G_P\left(t\right)=\frac{1}{\eta^{\beta}}t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}t^{\beta}\right)\quad(10)$$

როგორც ცნობილია წილადურ - ექსპონენციალური ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგნაირად
(Ильюшин, Победря 1970; Работнов 1988)

$$Э_{\beta-1}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}},t\right)=t^{\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}\left(1/\eta^{\beta}\right)^{n}t^{n\beta}}{\Gamma\left(\left(n+1\right)\beta\right)}\quad(11)$$

კავშირი წილად - ექსპონენციალურ ფუნქციასა და მიტტაგ-ლეფლერის ფუნქციას შორის გამოისახება ფორმულით
(Ильюшин, Победря 1970; Работнов 1988)

$t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(\nu t^{\beta}\right)=Э_{\alpha}\left(\nu,t\right)$, სადაც $\alpha=\beta-1.$ (12)

(12) ფორმულის თანახმად, გვაქვს

$$G_P\left(t\right)=\frac{1}{\eta^{\beta}}Э_{\alpha}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}},t\right)\quad(13)$$

აღვნიშნოთ $Э^{*}_{\beta-1}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)$ - თი ინტეგრალური ოპერატორი, რომლის გულიც არის (11) წილადურ- ექსპონენციალური ფუნქცია, ხოლო I^{*}_{α} - თი აღვნიშნოთ ინტეგრალური ოპერატორი, რომლის გულიცაა ფუნქცია $I_{\alpha}\left(t\right)=\frac{t^{\alpha}h\left(t\right)}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}$, სადაც $h\left(t\right)$ - ჰევისაიდის ფუნქციაა.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა: პირდაპირ და შებრუნებულო თანაფარდობებს ზენერის განზოგადოებული სხეულისათვის აქვთ სახე

$$\begin{cases}\sigma\left(t\right)=\left[\left(E_1+E_2\right)-\frac{E_2}{\eta^{\beta}}Э^{*}_{\alpha}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)\right]e(t)\\ e\left(t\right)=\left[\frac{1}{E_1+E_2}+\frac{E_2}{\left(E_1+E_2\right)^2\eta^{\beta}}Э^{*}_{\alpha}\left(-\frac{E_1}{\left(E_1+E_2\right)\eta^{\beta}}\right)\right]\sigma\left(t\right)\end{cases}$$

დამტკიცება: თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები (Koeller 1984)

$$\begin{cases}Э^{*}_{\alpha}\left(\lambda\right)=I^{*}_{\alpha}\left(1-\lambda I^{*}_{\alpha}\right)^{-1},\quad 1<\alpha<0,\\ \left(1-\lambda I^{*}_{\alpha}\right)^{-1}=1+\lambda Э^{*}_{\alpha}\left(\lambda\right)\\ D^{\beta}=\left(I^{*}_{\alpha}\right)^{-1},\quad \alpha=\beta-1,\quad 0<\beta<1\end{cases}\quad(14)$$

ვიმოქმედოთ (7) ტოლობის ორივე მხარეზე $\frac{1}{\eta^{\beta}}Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)$ ოპერატორით და ვისარგებლოთ (14) თანაფარდობებით (7) ტოლობის მარცხენა მხარეში მივიღებთ

$$\frac{1}{\eta^{\beta}}Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)\left(\eta^{\beta}D^{\beta}\sigma(t)+\sigma(t)\right)=Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)D^{\beta}\sigma(t)+\frac{1}{\eta^{\beta}}Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)\sigma(t)=$$

$$I_{\alpha}^{*}\left(1+\frac{1}{\eta^{\beta}}I_{\alpha}^{*}\right)^{-1}\left(I_{\alpha}^{*}\right)^{-1}\sigma(t)+\frac{1}{\eta^{\beta}}Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)\sigma(t)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{\eta^{\beta}}Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)\right)\sigma(t)+\frac{1}{\eta^{\beta}}Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)\sigma(t)=\sigma(t) \quad (15)$$

ხოლო მარჯვენა მხარეში კი გვექნება

$$\frac{1}{\eta^{\beta}}Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)\left[\left(E_1+E_2\right)\eta^{\beta}D^{\beta}+E_1\right]e(t)=$$

$$=\frac{1}{\eta^{\beta}}Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)\left[\left(E_1+E_2\right)\eta^{\beta}\left(I_{\alpha}^{*}\right)^{-1}+E_1\right]e(t)=$$

$$=\left[\left(E_1+E_2\right)\left(1-\frac{1}{\eta^{\beta}}Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)\right)+\frac{E_1}{\eta^{\beta}}Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)\right]e(t)=$$

$$=\left[\left(E_1+E_2\right)-\frac{E_2}{\eta^{\beta}}Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)\right]e(t) \quad (16)$$

(15) და (16) ფორმულების გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ

$$\sigma(t)=\left[\left(E_1+E_2\right)-\frac{E_2}{\eta^{\beta}}Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)\right]e(t) \quad (17)$$

გამოვსახოთ ახლა $e(t)$ $\sigma(t)$ – თი. ამისათვის (9) ფორმულაში უნდა ავიღოთ $a=\left(E_1+E_2\right)\eta^{\beta}$, და $b=E_1$ მაშინ

$$G_P(t)=\frac{1}{\left(E_1+E_2\right)\eta^{\beta}}Э_{\alpha}\left(-\frac{E_1}{\left(E_1+E_2\right)\eta^{\beta}}\cdot t\right) \quad (18)$$

თუ გავითვალისწინებთ (7) და (14) ტოლობებს მივიღებთ

$$e(t)=\frac{1}{(E_1+E_2)\eta^\beta}Э_\alpha^*\left(-\frac{E_1}{(E_1+E_2)\eta^\beta}\right)\left(\eta^\beta D^\beta+1\right)\sigma(t)=$$

$$=\frac{1}{(E_1+E_2)\eta^\beta}Э_\alpha^*\left(-\frac{E_1}{(E_1+E_2)\eta^\beta}\right)\left(\eta^\beta\left(I_\alpha^*\right)^{-1}+1\right)\sigma(t)=$$

$$=\left[\frac{1}{E_1+E_2}+\frac{E_2}{(E_1+E_2)^2\eta^\beta}Э_\alpha^*\left(-\frac{E_1}{(E_1+E_2)\eta^\beta}\right)\right]\sigma(t) \quad (19)$$

(17) და (19) ფორმულებიდან გამომდინარეობს თეორემის სამართლიანობა.

გამოვთვალოთ რელაქსაციისა და ცოცვადობის ფუნქცია. ამისათვის (17) და (19) ფორმულებში $e(t)$ და $\sigma(t)$ – ს ნახვლად უნდა ჩავსვათ ჰევისაიდის ფუნქცია $h(t)$. შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ფორმულა (Koeller 1984)

$$Э_\alpha^*(\lambda)h(t)=\frac{1}{\lambda}\left[E_\beta\left(\lambda t^\beta\right)-1\right]h(t) \quad (20)$$

სადაც $E_\beta(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\beta k+1)}$ მიტტაგ – ლეფლერის ერთპარამეტრიანი ფუნქციაა ([3], [4]). (20) ფორმულის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$G(t)=(E_1+E_2)h(t)-\frac{E_2}{\eta^\beta}\left(-\eta^\beta\right)\left[E_{\beta,1}\left(-\frac{t^\beta}{\eta^\beta}\right)-1\right]h(t)=$$

$$=(E_1+E_2)h(t)+E_2\left[E_{\beta,1}\left(-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right)-1\right]h(t)=$$

$$=\left[E_1+E_2E_{\beta,1}\left(-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right)\right]h(t) \quad (21)$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$J(t)=\left\{\frac{1}{E_1+E_2}-\frac{E_2}{(E_1+E_2)E_1}\left[E_{\beta,1}\left(-\frac{E_1}{E_1+E_2}\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right)-1\right]\right\}h(t) \quad (22)$$

შევცვალოთ ზენერის განზოგადოებულ სხეულში თავისუფალი ზამბარა წილადური აღრიცხვის ელემენტით. სიმარტრივისათვის დავუშვათ, რომ ახალი წილადური აღრიცხვის ელემენტი ემორჩილება იგივე განმსაზღვრელ

თანაფარდობას რასაც წილადური აღრიცხვია ელემენტი ზენერის განზოგადოებულ სხეულში.

განმსაზღვრელ თანაფარდობას მიღებული მოდელისათვის აქვს სახე

$$\eta^{\beta} D^{\beta} \sigma(t) + \sigma(t) = E\eta^{2\beta} D^{2\beta} e(t) + 2E\eta^{\beta} D^{\beta} e(t) \quad (23)$$

განვსაზღვროთ (23) თანაფარდობიდან დაძაბულობა. იმის გათვალისწინებით, რომ ამ შემთხვევაში

$$G_P(t) = \frac{1}{\eta^{\beta}} Э_{\alpha}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}, t\right) \quad (24)$$

მივიღებთ

$$\sigma(t) = \frac{1}{\eta^{\beta}} Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)\left(E\eta^{2\beta} D^{2\beta} + 2E\eta^{\beta} D^{\beta}\right) e(t) =$$

$$= \eta^{\beta} E Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right) D^{2\beta} e(t) + 2E\left(1 - \frac{1}{\eta^{\beta}} Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right)\right) e(t) \quad (25)$$

(25) ფორმულიდან მივიღებთ რელაქსაციის ფუნქციის შემდეგ გამოსახულებას

$$G(t) = E\eta^{\beta} Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right) D^{2\beta} h(t) + 2EE_{\beta,1}\left(-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right) h(t) \quad (26)$$

მეორე შესაკრები (26) ფორმულაში რჩება სასრული დროის ნებისმიერი სასრული მნიშვნელობისათვის. განვიხილოთ (26) ფორმულის პირველი შესაკრების ყოფაქცევა, როცა $t \to 0^{+}$. აღვნიშნოთ ეს შესაკრები A – ით

$$A = E\eta^{\beta} Э_{\alpha}^{*}\left(-\frac{1}{\eta^{\beta}}\right) D^{2\beta} h(t)$$

ცნობილია, რომ (Работнов 1977: 299-307), როცა $\alpha < 0$ და მცირე t – სათვის

$$Э_{\alpha}(\gamma, t) \approx \frac{t^{\alpha} h(t)}{\Gamma(1+\alpha)} = I_{\alpha}(t)$$

ამიტომ , როცა $t \to 0^{+}$

$$A \approx E\eta^{\beta} I_{\alpha}^{*} D^{2\beta} h(t)$$

რადგანაც $0 < \beta < 1$ ამიტომ $0 < 2\beta < 2$

განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა:

1. $2\beta = 1$. მაშინ

$D^{2\beta} h(t) = \delta(t)$ და

$$A \approx E\eta^{\frac{1}{2}} \frac{t^{\alpha} h(t)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \to \infty \text{, როცა } t \to 0^{+}$$

2. $2\beta \neq 1$. მაშინ (Oldham, Spanier 1974)

$$D^{2\beta} h(t) = \frac{t^{-2\beta}}{\Gamma(1-2\beta)}, \quad t > 0$$

გვაქვს

$$A \approx \frac{E\eta^{\beta}}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-2\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha} \tau^{-2\beta} d\tau =$$

$$= \frac{E\eta^{\beta} t^{\alpha-2\beta+1}}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-2\beta)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha} x^{-2\beta} dx =$$

$$= \frac{E\eta^{\beta} t^{-\beta}}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-2\beta)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha} x^{-2\beta} dx$$

რადგანაც $1+\alpha = \beta$.

თუ $0 < 2\beta < 1$, მაშინ

$$\int_0^1 (1-x)^{\alpha} x^{-2\beta} dx = B(1-2\beta, 1+\alpha)$$

სადაც B ეილერის ბეტა ფუნქციაა. ე.ი. ამ შემთხვევაში

$$A \approx \frac{E\eta^{\beta}}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-2\beta)} B(1-2\beta, 1+\alpha) t^{-\beta} = \frac{E\eta^{\beta}}{\Gamma(-\alpha)} t^{-\beta} \to \infty,$$ როცა $t \to 0^{+}$ რადგანაც $-\beta < 0$.

თუ $1 < 2\beta < 2$ მაშინ $\int_0^1 (1-x)^{\alpha} x^{-2\beta} d$ განშლადია და მითუმეტეს $A \to \infty$, როცა $t \to 0+$.

საბოლოოდ $G(t) \to \infty$, როცა $t \to 0+$. ე.ი. სასრული მყისიერი დაგრძელება მოითხოვს ძალის უსასრულო მნიშვნელობას.

აქედან ჩანს რომ, რომ მოდელებისათვის, რომლებიც შედგებიან ზამბარებისაგან და წილადური აღრიცხვის ელემენტებისაგან, სასრული ძალით განხორციელებული სასრული მყისიერი გაგრძელება ხდება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა გვაქვს ერთი ან რამოდენიმე ზამბარა, რომლებიც თავისუფლად შეგვიძლია შევკუმშოთ ან გავჭიმოთ, თუკი არ ხდება წილადური რიგის ელემენტების ერთდროული დამოკლება ან დაგრძელება.

ლიტერატურა:

Gorenflo .... 2014: Rudolf Gorenflo, Anatoly A. Kilbas, Francesco Mainardi, Sergei V. Rogozin. Mittag – Leffler Functions, Related Topics and applications, Springer, 2014.

Koeller 1984: Koeller R.C. Applicationa of fractional calculus to the Theory of Viscoelasticity. J.Appl.Mech., v.51, 1984.

Podlubny 1999: I. Podlubny. Fractional Differential Equations (An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solutions and Some of Their Applications). Academic Press. San-Diego-Boston- New York-London-Sydney-Tokyo-Toronto, 1999.

Oldham, Spanier 1974: K.B. Oldham, J. Spanier. The fractional calculus. N.Y., London, Acad. Press. 1974.

Сургуладзе 2001: Т.А.Сургуладзе. Об определяющих соотношениях одной модели вязкоупругости, Вест. Моск. Ун-таюМатем. Мепхан. 4, 2001.

Ильюшин, Победря 1970: А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. Основы математической теории термовялоупругости. Москва, изд-во “Наука”, 1970.

Работнов 1988: Ю.Н.Работнов. Механика деформируемого твердого тела. Москва, изд-во “Наука”,Главная редакция физико – математической литературы, 1988.

Работнов 1977: Ю.Н.Работнов. Элементы наследственной механики твердых тел. Москва, изд-во “Наука”,Главная редакция физико – математической литературы, 1977.

Mathematical Physics

The Direct and Reverse Relationships of Generalized Zener Body, when the Defining Relationship Contains Derivative of Fractional Order According to Riemann-Liouville

Teimuraz Surguladze
Akaki Tsereteli University
Kutaisi, Georgia
teimuraz.surguladze@atsu.edu.ge

The paper dwells on generalized Zener body, when the defining relationship contains derivative of fractional order in the opinion of Riemann-Liouville. The defining relationship for generalized Zener body has been written down by means of the kinematic and dynamic relations. The direct and reverse relationships have been obtained for generalized Zener body using the fractional