დარგი: მათმატიკა

რაჟდენ ხაზურძანია

ბრტყელ ბადეთა შესახებ სამგანზომილებიან არასაკუთრივ ჰიპერსიბრტყეში

განიხილება V_3 ზედაპირი გაფართოებულ ევკლიდურ $\overline{E}_4 == E_4 \cup E_3^*$ სივრცეში, სადაც E_3^* არის ელიფსური S_3 სივრცის სტრუქტურის მქონე არასაკუთრივი ჰიპერსიბრტყე. V_3 ზედაპირს მიუერთდება მოძრავი რეპერი $R=\{A,A_i,A_4\}$, $(i=1,2,3)$, $A\in V_3$, $\{A_i,A_4\}\subset E_3^*$. ვთქვათ V_3 ზედაპირზე მოცემულია $(\omega^1,\omega^2,\omega^3)$ წირთა ბადე, ხოლო R რეპერი აგებულია ამ ბადის წირებისადმი (AA_i) მხებებზე. როცა A წერტილი აღწერს V_3 ზედაპირს, მაშინ A_i, A_4 წერტილები E_3^* სივრცეში, ზოგად შემთხვევაში, აღწერენ სამგანზომილებიან ბრტყელ $(\omega^1,\omega^2,\omega^3)$ წირთა ბადეებს. შესწავლილია ეს ბადეები, როცა V_3 ზედაპირი წარმოადგენს სამგანზომილებიან შეუღლებულ სისტემას $(\omega^1,\omega^2,\omega^3)$ წირთა ბადის მიმართ და როცა ეს ბადე სიმრუდის წირთა ბადეა.

საკვანძო სიტყვები: მოძრავი რეპერი, ბრტყელი ბადე, გაფართოებული ევკლიდური სივრცე, შეუღლებული სისტემა.

განვიხილოთ V_3 ზედაპირი გაფართოებულ ევკლიდურ $\overline{E}_4 == E_4 \cup E_3^*$ სივრცეში, სადაც E_3^* არის ელიფსური S_3 სივრცის სტრუქტურის მქონე არასაკუთრივი ჰიპერსიბრტყე.

მივუერთოდ V_3 ზედაპირს მოძრავი რეპერი

$R=\{A,A_i,A_4\}$

$(i,j,k,\ell,t,q=1,2,3)$, $A\in V_3$, $A_i\in T_3(A)$ $\left(T_3(A)\right.$მხები სამგანზომილე-ბიანი სიბრტყეა V_3 ზედაპირისადმი A წერტილში), $A_4\in N_1(A)$ $\left(N_1(A)\right.$ არის მხები $T_3(A)$ სიბრტყის ორთოგონალური წრფე), $\{A_i,A_4\}\subset E_3^*$.

ვთქვათ R რეპერის განმსაზღვრელი A, A_i, A_4 წერტილები გაჩენილია $\vec{A}, \vec{A}_i, \vec{A}_4$ ვექტორებით შესაბამისად. R რეპერის დერივაციულ ფორმულებს ექნებათ სახე:

$$d\vec{A} = \omega^i \vec{A}_i,$$
$$d\vec{A}_i = \omega_i^j \vec{A}_j + \omega_i^4 \vec{A}_4,$$
$$d\vec{A}_4 = \omega_4^i \vec{A}_i + \omega_4^4 \vec{A}_4.$$

მაშასადამე , $\omega^4 = 0$ და ω^i მთავარი ფორმებია. $\omega^4 = 0$ განტოლების გარე დიფერენცირებით და კარტანის ლემის გამოყენებით ვღებულობთ:

$$\omega_i^4 = b_{ij}^4 \omega^j \quad \left(b_{ij}^4 = b_{ji}^4\right).$$

ამ განტოლებათა სისტემის კიდევ ერთხელ გაგრძელებით გვექნება:

$$db_{ij}^4 - b_{kj}^4 \omega_i^k - b_{ik}^4 \omega_j^k + b_{ij}^4 \omega_4^4 = b_{ijt}^4 \omega^t. \quad (1)$$

ვთქვათ V_3 ზედაპირზე მოცემულია $\left(\omega^1, \omega^2, \omega^3\right)$ წირთა ბადე, ხოლო R რეპერი აგებულია ამ ბადის წირებისადმი $\left(AA_i\right)$ მხებებზე. მაშინ

$$\omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k \left(i \neq j\right),$$

რომლის გაგრძელება გვაძლევს:

$$da_{ik}^j + a_{ik}^j\left(-\omega_i^i - \omega_k^k + \omega_j^j\right) + b_{ik}^4 \omega_4^i - a_{it}^j \omega_k^t - a_{\ell k}^j \omega_i^\ell = a_{ikq}^j \omega^q. \quad (2)$$

როცა A წერტილი აღწერს V_3 ზედაპირს, მაშინ A_i, A_4 წერტილები E_3^* სივრცეში, ზოგად შემთხვევაში, აღწერენ სამგანზომილებიან $\left(A_i\right),\left(A_4\right)$ ზედაპირებს, რომლებზეც ბუნებრივად აღმოცენდებიან ბრტყელი $\left(\omega^1, \omega^2, \omega^3\right)$ წირთა ბადეები.

შევნიშნოთ, რომ Σ_p ბადეს ეწოდება ბრტყელი, თუ V_p ზედაპირი, რომელზეც მოცემულია ეს ბადე წარმოადგენს p განზომილებიან სიბრტყეს,ხოლო Σ_p ბადეს ეწოდება შეუღლებული, თუ მის ყოველ წერტილში ბადის წირებისადმი მხებებს ამ წერტილში აქვთ შეუღლებული მიმართულებები.

Σ_p ბადის შეუღლებულობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყველა $b_{ij}^4 \left(i \neq j\right)$ ნულის ტოლი იყოს, როცა R რეპერის $\left(AA_i\right)$ წიბოები A წერტილში ბადის ω^i წირებისადმი მხეებს წარმოადგენენ (Базылев 1965: 138).

განვიხილოთეს ბრტყელი ბადეები. დავიწყოთ A_1 წერტილის მიერ აღწერილი ბადით.

ვთქვათ V_3 ზედაპირზე $\left(\omega^1, \omega^2 \omega\right)$ წირთა ბადე შეუღლებულია. მაშინ:

$$d\vec{A}_1 = \omega_1^1 \vec{A}_1 + \left(a_{11}^2 \vec{A}_2 + a_{11}^3 \vec{A}_3 + b_{11}^4 \vec{A}_4\right)\omega^1 + \left(a_{12}^2 \vec{A}_2 + a_{12}^3 \vec{A}_3\right)\omega^2 + \left(a_{13}^2 \vec{A}_2 + a_{13}^3 \vec{A}_3\right)\omega^3$$

მაშასადამე, (A_1) ზედაპირისადმი მხები 3-სიბრტყე განისაზღვრება A_1, B_{1i} წერტილებით, სადაც B_{1i} წერტილები გაჩენილია ვექტორებით.

$$\vec{B}_{11} = a_{11}^{2}\vec{A}_2 + a_{11}^{3}\vec{A}_3 + B_{11}^{4}\vec{A}_4, \quad \vec{B}_{12} = a_{12}^{2}\vec{A}_2 + a_{12}^{3}\overrightarrow{A_3}, \quad \overrightarrow{B_{13}} = a_{13}^{2}\vec{A}_2 + a_{13}^{3}\vec{A}_3.$$

თუ $$\begin{vmatrix} a_{11}^2 & a_{11}^3 & b_{11}^4 \\ a_{12}^2 & a_{12}^3 & 0 \\ a_{13}^2 & a_{13}^3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12}^2 & a_{12}^3 \\ a_{13}^2 & a_{13}^3 \end{vmatrix} \neq 0$$

მაშინ $\vec{B}_{1i}$ ვექტორები და მაშასადამე მათ მიერ გაჩენილი წერტილები წრფივადდამოუკიდებელნიარიან.ჩავთვალოთრომესპირობაშესრულებულია და (A_1) ზედაპირს მივუერთოდ მოძრავი რეპერი $R_1 = \{A_1, B_{1i}\}$. ამ რეპერის დერივაციული ფორმულები იქნება:

$$d\vec{A}_1 = \theta_\circ^\circ \vec{A}_1 + \theta^i \vec{B}_{1i}$$

$$d\vec{B}_{1i} = \theta_i^\circ \vec{A}_1 + \theta_i^j \vec{B}_{1j}.$$

ვიპოვოთ $\theta_i^j \ (i \neq j)$ ფორმები. გვექნება:

$$d\vec{B}_{11} = da_{11}^{2} \cdot \vec{A}_2 + a_{11}^{2}\left(\omega_2^i \vec{A}_i + \omega_2^4 \vec{A}_4\right) + da_{11}^{3} \cdot \vec{A}_3 + a_{11}^{3}\left(\omega_3^i \vec{A}_i + \omega_3^4 \vec{A}_4\right) + db_{11}^{4} \cdot \vec{A}_4 +$$
$$+ b_{11}^4\left(\omega_4^i \vec{A}_i + \omega_4^4 \vec{A}_4\right) = \left(a_{11}^2\omega_2^1 + a_{11}^3\omega_3^1 + b_{11}^4\omega_4^1\right)\vec{A}_1 + \left(da_{11}^2 + a_{11}^2\omega_2^2 + a_{11}^3\omega_3^2 + b_{11}^4\omega_4^2\right)\vec{A}_2 +$$
$$+\left(da_{11}^3 + a_{11}^2\omega_2^3 + a_{11}^3\omega_3^3 + b_{11}^4\omega_4^3\right)\vec{A}_3 + \left(db_{11}^4 + a_{11}^2\omega_2^4 + a_{11}^3\omega_3^4 + b_{11}^4\omega_4^4\right)\vec{A}_4.$$

მეორე მხრივ:

$$d\vec{B}_{11} = \theta_1^0 \vec{A}_1 + \theta_1^i \vec{B}_{1i} = \theta_1^0 A_1 + \theta_1^1\left(a_{11}^{2}\vec{A}_2 + a_{11}^{3}\vec{a}_3 + b_{11}^{4}\vec{A}_4\right) + \theta_1^2\left(a_{12}^2\vec{A}_2 + a_{12}^3\vec{A}_3\right) +$$
$$+\theta_1^3\left(a_{13}^2\vec{A}_2 + a_{13}^3\vec{A}_3\right) = \theta_1^0\vec{A}_1 + \left(a_{11}^2\theta_1^1 + a_{12}^2\theta_1^2 + a_{13}^2\theta\right)\vec{A}_2 + \left(a_{11}^3\theta_1^1 + a_{12}^3\theta_1^2 + a_{13}^3\theta_1^3\right)\vec{A}_3 + b_{11}^4\theta_1^1\vec{A}_4$$
.

$d\vec{B}_{11}$-ის ამ ორი გამოსახულების შედარებით ვღებულობთ შემდეგ სისტემას:

$$\theta_1^0 = a_{11}^2\omega_2^1 + a_{11}^3\omega_3^1 + b_{11}^4\omega_4^1,$$

$$a_{1i}^{\hat{i}}\theta_1^i = da_{11}^{\hat{i}} + a_{11}^{\hat{j}}\omega_{\hat{j}}^{\hat{i}} + b_{11}^4\omega_4^{\hat{i}},$$

$$b_{11}^4\theta_1^1 = db_{11}^4 + a_{11}^{\hat{i}}\omega_{\hat{i}}^4 + b_{11}^4\omega_4^4,$$

$$\left(\hat{i}, \hat{j} = 2,3\right).$$

(1) და (2) ფორმულებიდან გამოვთვალოთ $da_{11}^{\hat{i}}$ და db_{11}^{4} -ის მნიშვნელობები და შევიტანოთ მიღებულ სისტემაში, რომლის ამოხსნის შემდეგ მივიღებთ θ_1^i -ს გამოსახულებებს.

აღმოჩნდა, რომ ყველა θ_i^j ფორმა არის მთავარი. შემოკლებით შეიძლება ისინი ასე ჩავწეროთ $\theta_i^j = \alpha_{i\,k}^{\,j}\omega^k$.

ანალოგიური გამოთვლებით ვაწარმოოთ A_2 და A_3 წერტილების მიერ აღწერილი ბადეებისათვის.

ცნობილია, რომ p განზომილებიანი შეუღლებული სისტემა ეწოდება p განზომილებიან V_p ზედაპირს n განზომილებიან პროექციულ P_n სივრცეში, თუ მასზე შეიძლება ავირჩიოთ წირთა ისეთი p ოჯახი, რომ 1) ზედაპირის ყოველ წერტილზე გადის თითო წირი ყოველი ოჯახიდან, თანაც წრფივად დამოუკიდებელი მიმართულებებით, 2) ნებისმიერი ოჯახის წირებისადმი მხებები, რომლებიც აღებულნი არიან სხვა ოჯახის ნებისმიერი წირის გასწვრივ შეადგენენ ორგანზომილებიან განფენად ზედაპირს (Смирнов1950: 437).

მივედით ასეთ შედეგამდე:

თეორემა: თუ V_3 ზედაპირი წარმოადგენს სამგანზომილებიან შეუღლებულ სისტემას $\left(\omega^1,\omega^2,\omega^3\right)$ წირთა ბადის მიმართ, $b_{ii}^4 \neq 0,\quad \det\left\|a_{i\,j}^{\hat{i}}\right\| \neq 0 \quad \left(i,i,j=1,2,3:\quad \hat{i},j\neq i\right)$, მაშინ A_i წერტილები E_3^* არასაკუთრივ ჰიპერსიბრტყეში ასევე აღწერენ სამგანზომილებიან შეუღლებულ სისტემებს ბრტყელი $\left(\omega^1,\omega^2,\omega^3\right)$ წირთა ბადის მიმართ.

ვთქვათ $\left(\omega^1,\omega^2,\omega^3\right)$ წირთა ბადე V_3 ზედაპირზე წარმოადგენს სიმრუდის წირთა ბადეს. განვიხილოთ A_4 წერტილის მიერ აღწერილი ბრტყელი წირთა ბადე $\left(\omega^1,\omega^2,\omega^3\right)$. დავუშვათ $\left|\overrightarrow{AA_i}\right| = \left|\overrightarrow{AA_4}\right| = 1$. მაშინ $\omega_4^4 = 0$.

გვექნება:

$$d\overrightarrow{A_4} = \omega_4^i\overrightarrow{A_i} = -\gamma^{ik}\omega_k^4 A_i = -\omega_1^4\overrightarrow{A_1} - \omega_2^4\overrightarrow{A_2} - \omega_3^4 A_3 = \left(-b_{1\,1}^4\overrightarrow{A_1}\right)\omega^1 + \left(-b_{2\,2}^4\overrightarrow{A_2}\right)\omega^2 + \left(-b_{3\,3}^4\overrightarrow{A_3}\right)\omega^3$$

შევნიშნოთ, რომ γ^{ik} წარმოადგენს V_3 ზედაპირის მეტრიკული $\gamma_{i_j} = \overrightarrow{AA_i}\cdot\overrightarrow{AA_j}$ ტენზორის კონტრავარიანტულ კომპონენტებს (Базылев 1966: 475).

აღვნიშნოთ

$$\overrightarrow{B}_{4i} = -b_{ii}^4\overrightarrow{A_i},$$

B_{4i} წერტილები, რომლებიც ამ ვექტორებითაა გაჩენილი წრფივად დამოუკიდებელია, თუ $b_{ii}^4 \neq 0$. ჩავთვლით, რომ ეს პირობა შესრულებულია და A_4 წერტილს მივუერთოდ მოძრავი რეპერი

$$R_4 = \{A_4, B_{4i}\}$$

ამ რეპერის დერივაციული ფორმულები იქნება:

$$d\vec{A}_4 = \varphi_0^0 \vec{A}_4 + \varphi^i \vec{B}_{4i},$$

$$d\vec{B}_{4i} = \varphi_i^0 \vec{A}_4 + \varphi_i^j \vec{B}_{4j}.$$

ვიპოვოთ φ_i^j ფორმები.
გვექნება:

$$d\vec{B}_{41} = -db_{11}^4 \vec{A}_1 - b_{11}^4 \left(\omega_1^2 \vec{A}_2 + \omega_1^3 \vec{A}_3 + \omega_1^4 \vec{A}_4\right) = -b_{11t}^4 \omega^t \vec{A}_1 - b_{11}^4 \omega_1^2 \vec{A}_2 - b_{11}^4 \omega_1^3 \vec{A}_3 - \left(b_{11}^4\right)^2 \omega^1 \vec{A}_4$$

მეორე მხრივ:

$$d\vec{B}_{41} = \varphi_1^0 \vec{A}_4 - \varphi_1^1 b_{11}^4 \vec{A} - \varphi_1^2 b_{22}^4 \vec{A}_2 - \varphi_1^3 b_{33}^4 \vec{A}_3.$$

$d\vec{B}_{41}$-ის გამოსახულებების შედარებით ვღებულობთ განტოლებათა სისტემას:

$$b_{11}^4 \varphi_1^1 = b_{11t}^4 \omega^t,$$

$$b_{22}^4 \varphi_1^2 = b_{11}^4 \omega_1^2,$$

$$b_{33}^4 \varphi_1^3 = b_{11}^4 \omega_1^3.$$

ჩავატარებთ, რა ანალოგიურ გამოთვლებს $\vec{B}_{42}, \vec{B}_{43}$, ვექტორებისათვის, მივიღებთ რომ

$$\varphi_i^i = \frac{1}{b_{ii}^4} b_{iit}^4 \omega^t$$

$$\varphi_i^j = \frac{b_{ii}^4}{b_{jj}^4} \omega_i^j \qquad (i \neq j)$$

ცნობილია, რომ ბრტყელ Σ_p ბადეს ეწოდება პირველი გვარის ციკლურად შეუღლებული სისტემა, თუ Σ_p ბადის წირთა ოჯახის ნუმერირება ისე შეიძლება მოვახდინოთ, რომ ბადის წირებისადმი მხებების ფსევდოფოკუსები გახდებიან ჩვეულებრივი ფოკუსები. ასეთი ბადის წირებისადმი მხებებზე აგებულ მოძრავ რეპერში გვაქვს: $a_{i,i+1}^k = 0$,სადაც $k = \overline{1,p}$, $k \neq i, i+1$; ინდექსი $p+1$ უნდა შევცვალოთ ინდექსით 1 (Базылев 1967: 3).

φ_i^j ფორმების გამოსახულებებიდან გამომდინარეობს

თეორემა: თუ $b_{ii}^4 \neq 0$, მაშინ A_4 წერტილის მიერ E_3^* არასაკუთრივ

ჰიპერსიბრტყეში აღწერილი $\left(\omega^1,\omega^2,\omega^3\right)$ბრტყელ წირთა ბადე წარმოადგენს პირველი გვარის ციკლურად შეუღელუბულ სისტემას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა V_3 ზედაპირი წარმოადგენს სამგანზომილებიან შეუღლებულ სისტემას $\left(\omega^1,\omega^2,\omega^3\right)$სიმრუდის წირთა ბადის მიმართ.

შევნიშნოთ, რომ ამ დროს A_4 წერტილის მიერ E_3^*-ში აღწერილი $\left(A_4\right)$ ზედაპირი წარმოადგენს სამგანზომილებიან შეუღლებულ სისტემას $\left(\omega^1,\omega^2,\omega^3\right)$ წირთა ბადის მიმართ.

ლიტერატურა:

Базылев 1965: Базылев В. Т. К геометрйй плоских многомерных сетей. Уч. зап. МГПИ йм. В.И.Ленина, 1965.

Базылев 1966: Базылев В. Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. Литовский математический сборник. VI, №4, 1966.

Базылев 1967: Базылев В. Т. О фундаментальных объектах плоских многомерных сетей. Изв. Высщ. Учебн. Завед. Математика, №9(64), 1967.

Смирнов 1950: Смирнов Р. В. Преобразование Лапласа p –сщпряженных систем. ДАНСССР, т. 71, №3, 1950.

Field: Mathematics

Razhden Khaburdzania

Plane Nets In Three-dimensional Non-proper Hyperplane

Let us consider the surface V_3 in the extended Euclidean space , $\overline{E}_4 == E_4 \cup E_3^*$ where E_3^* is a non-proper hyperplane carrying the structure of the elliptical space S_3 .

To the surface V_3 , we attach a moving frame

$$R = \{A, A_i, A_4\}$$

$(i, j, k, \ell, t, q = 1,2,3)$, $A \in V_3$, $A_i \in T_3(A)$ $\left(T_3(A)\right.$ is the tangential 3-plane to the surface V_3 at the point A), $A_4 \in N_1(A)$ $\left(N_1(A)\right.$is the tangent $T_3(A)$ the ortogonal line of the plane).