მათემატიკური ფიზიკა

ნახევარსიბრტყეში დრეკადნარევთა თეორიის სტატიკის ზოგიერთი ძირითადი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის შესახებ

კოსტა სვანაძე

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი, ქუთაისი, საქართველო
kostasvanadze@yahoo.com

ნაშრომში ნახევარი სიბრტყის შემთხვევაში დრეკადნარევთა წრფივი თეორიის სტატიკის ერთგვაროვანი განტოლებისათვის განიხილება კლასიკური დერკადობის ბრტყელი თეორიის სტატიკის მესამე და მეოთხე სასაზღვრო ამოცანების ანალოგიური ამოცანები. დამტკიცებულია ერთადერთობის თეორემები, ამასთან, კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ანალოგიური ფორმულების გამოყენებით აღნიშნული ამოცანების ამონახსნები მოცემულია კვადრატურებში.

საკვანძო სიტყვები: *დრეკადნარევთა წრფივი თეორია, სტატიკის ამოცანები, რიმან-ჰილბერტის ამოცანა, კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ანალოგიური ფორმულები.*

10. დრეკადნარევთა წრფივი თეორიის სტატიკის ერთგვაროვანი განტოლება კომპლექსური ფორმით ასე ჩაიწერება (Basheleishvili 2001: 427-446):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + K \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial \bar{z}^2} = 0, \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 + iu_2 \\ u_3 + iu_4 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

სადაც $u' = (u_1, u_2)^T$ და $u'' = (u_3, u_4)^T$ კერძო გადაადგილებებია, $z = x_1 + ix_2$,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad K = -\frac{1}{2} l m^{-1}, l = \begin{bmatrix} l_4 & l_5 \\ l_5 & l_6 \end{bmatrix},$$

$$m^{-1} = \frac{1}{\Delta_0}\begin{bmatrix} m_3 & -m_2 \\ -m_2 & m_1 \end{bmatrix}, \qquad \Delta_0 = m_1 m_3 - m_2^2,$$

$$m_k = l_k + \frac{1}{2} l_{3+k}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$l_1 = a_1 / d_2, \quad l_2 = -c / d_2, \quad l_3 = a_2 / d_2, \quad a_1 = \mu_1 - \lambda_5,$$
$$c = \mu_3 + \lambda_5, \quad a_2 = \mu_2 - \lambda_5, \quad d_2 = a_1 a_2 - c^2,$$
$$l_1 + l_4 = b / d_1, \quad l_2 + l_5 = -c_0 / d_1, \quad l_3 + l_6 = a / d_1, \quad d_1 = ab - c_0^2,$$
$$a = a_1 + b_1, \quad b = a_2 + b_2, \quad c_0 = c + d, \quad b_1 = \mu_1 + \lambda_1 + \lambda_5 - \alpha_2 \rho_2 / \rho,$$
$$b_2 = \mu_2 + \lambda_2 + \lambda_5 + \alpha_2 \rho_1 / \rho,$$
$$d = \mu_2 + \lambda_3 - \lambda_5 - \alpha_2 \rho_1 / \rho \equiv \mu_3 + \lambda_4 - \lambda_5 + \alpha_2 \rho_2 / \rho,$$
$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \alpha_2 = \lambda_3 - \lambda_4.$$

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \lambda_p, p = \overline{1,5}$, დრეკადი მუდმივებია ρ_1 და ρ_2 მუდმივებს აქვთ სიმკვრივის განზომილება. აღნიშნული მუდმივები აკმაყოფილებენ კონკრეტულ პირობებს (Basheleishvili 1995: 51-105).

მ. ბაშელეიშვილის მიერ შრომაში (Basheleishvili 2001: 427-446) მიღებულია კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ანალოგიური ფორმულები:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 + iu_2 \\ u_3 + iu_4 \end{pmatrix} = m\varphi(z) + \frac{1}{2} l \, z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \tag{2}$$

$$TU = \begin{pmatrix} (Tu)_2 - i(Tu)_1 \\ (Tu)_4 - i(Tu)_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial S(x)} \left[(A - 2E)\varphi(z) + Bz\overline{\varphi'(z)} + 2\mu\overline{\psi(z)} \right] \tag{3}$$

სადაც $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ და $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ ნებისმიერი ანალიზური ვექტორ-ფუნქციებია, $(TU)_p$, $p = \overline{1,4}$ ძაბვის ვექტორის კომპონენტებია (Basheleishvili 1995: 51-105).

$$\frac{\partial}{\partial S(x)} = n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - n_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad n = (n_1, n_2)^T$$ გარე ნორმალის მგეზავია.

$$A = 2\mu m, \qquad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_3 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{bmatrix}, \quad m = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{bmatrix}, \qquad B = \mu l, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

აღვნიშნოთ

$$U_n = \begin{pmatrix} u_1 n_1 + u_2 n_2 \\ u_3 n_1 + u_4 n_2 \end{pmatrix}, \quad U_S = \begin{pmatrix} u_2 n_1 - u_1 n_2 \\ u_4 n_1 - u_3 n_2 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_n = \begin{pmatrix} (Tu)_1 n_1 + (Tu)_2 n_2 \\ (Tu)_3 n_1 + (Tu)_4 n_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_S = \begin{pmatrix} (Tu)_2 n_1 - (Tu)_1 n_2 \\ (Tu)_4 n_1 - (Tu)_3 n_2 \end{pmatrix}.$$

2^0. ვთქვათ, D^+ არის ზედა ნახევარი სიბრტყე $(x_2 > 0)$ ხოლო L კი მისი საზღვარი, ე.ი. ox_1 ღერძი $L = (-\infty, \infty)$. მოცემულ შემთხვევაში $n = (n_1, n_2)^T = (0, -1)^T$ ხოლო $S^0 = (-n_2, n_1)^T = (1, 0)^T$ მხები ვექტორის შესაბამისი ერთეულოვანი ვექტორია.

ქვემოთ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $u_k \in C^2(D^+) \bigcap C^{1,\alpha}(D^+ \bigcup L)$, ამასთან

$$u_k = 0(1), \quad |x|^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0(1), \quad j = 1,2, \quad k = \overline{1,4}, \quad |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 .$$

შრომაში განიხილება შემდეგი ამოცანები: D^+ არეში ვიპოვოთ (1) განტოლების ისეთი რეგულარული $U = (u_1 + iu_2, u_3 + iu_4)^T$ ამონახსენი, რომლიც აკმაყოფილებს შემდეგი სასაზღვრო პირობებიდან ერთ-ერთს

$$\begin{aligned} & U_n^+ |_{x_2=0} = -\begin{pmatrix} u_2 \\ u_4 \end{pmatrix}^+ |_{x_2=0} = f^{(1)}(x_1), \\ & \sigma_S^+ |_{x_2=0} = \begin{pmatrix} (Tu)_1 \\ (Tu)_3 \end{pmatrix}^+ |_{x_2=0} = F^{(1)}(x_1), \qquad x_1 \in L, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} & U_S^+ |_{x_2=0} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_3 \end{pmatrix}^+ |_{x_2=0} = f^{(2)}(x_1), \\ & \sigma_n^+ |_{x_2=0} = -\begin{pmatrix} (Tu)_2 \\ (Tu)_4 \end{pmatrix}^+ |_{x_2=0} = F^{(2)}(x_1), \qquad x_1 \in L, \end{aligned} \tag{5}$$

სადაც $f^{(j)}$ და $F^{(j)}$, $j = 1,2,$ ნამდვილი, L-ზე მოცემული გლუვი ვექტორ-ფუნქციებია. ამასთან უსასრულობაში აკმაყოფილებენ კონკრეტულ პირობებს.

ქვემოთ (1), (4) ამოცანას აღვნიშნავთ $(III_*)^+$ -ით ხოლო (1), (5) ამოცანას კი $(IV_*)^+$ -ით.

გრინის განზოგადებული ფორმულის გამოყენებით (Basheleishvili 1995: 51-105) მარტივად დავამტკიცებთ შემდეგი თეორემების მართებულობას.

თეორემა 1. $\left(III_*\right)^+$ ამოცანის შესაბამისი ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით $U=\left(u_1+iu_2,u_3+iu_4\right)^T=d_0$, სადაც d_0 ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივი ვექტორია.

თეორემა 2. $\left(IV_*\right)^+$ ამოცანის შესაბამისი ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით $U=\left(u_1+iu_2,u_3+iu_4\right)^T=i\beta_0$ სადაც β_0 ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივი ვექტორია.

3^0. $\left(IV_*\right)^+$ ამოცანის ამოხსნა. (2) და (3) ფორმულების გათვალისწინებით φ და ψ ანალიზური ვექტორი ფუნქციების საშუალებით განსახილველი ამოცანა შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: D^+ არეში ვიპოვოთ ისეთი ანალიზური $\varphi(\zeta)=\varphi(t+i\eta)$ და $\psi(\zeta)=\psi(t+i\eta)$ ვექტორ-ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\left[m\varphi(\zeta)+\frac{1}{2}l\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)}\right]_{\eta=0}=\\&\operatorname{Re}\left[m\varphi(\zeta)+\frac{1}{2}l\zeta\varphi'(\zeta)+\psi(\zeta)\right]_{\eta=0}=f^{(2)}(t),\end{aligned}\tag{6}$$

$$\operatorname{Re}\varphi'(\zeta)|_{\eta=0}=\frac{1}{2}F^{(2)}(t)+2\mu\left[f^{(2)}(t)\right]',\tag{7}$$

სადაც $t\in L,\quad f^{(2)}(t)\in C^{1,\alpha}(L),\quad F^{(2)}(t)\in C^{0,\alpha}(L),\quad \alpha>0,$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}F^{(2)}(t)\,dt=0,\ f^{(2)}=A_0+B_0/|t|^{1+\alpha_0}\ F^{(2)}=\gamma/|t|^{1+\alpha_0},\quad \alpha_0>0\ A_0,B_0$ და γ მუდმივი ვექტორებია.

ქვემოთ, აგრეთვე ,ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძილია ვიგულისხმოთ, რომ φ და ψ ვექტორ-ფუნქციებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$\varphi(\infty)=0,\ \psi(\infty)=0(1).\tag{8}$$

ჩატარებული მსჯელობიდან ნათლად ჩანს, რომ $(IV_*)^+$ ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება ზედა ნახევარსიბრტყის შემთხვევაში (6) და (7) რიმან-ჰილბერტის ამოცანების ამოხსნაზე.

ახლა შევნიშნოთ, რომ (8) პირობების გათვალისწინებით (6) და (7) ამოცანების ამოხსნის შედეგად (მუსხელიშვილი 1982) $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ და $\psi(z)$ ვექტორ-ფუნქციების განსაზღვრისათვის მივიღებთ შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$m\varphi(z)+\frac{1}{2}lz\varphi'(z)+\psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f^{(2)}(t)dt}{t-z}+iC^0, \tag{9}$$

$$\varphi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[F^{(2)}(t)+4\mu\left(f^{(2)}(t)\right)'\right]\frac{dt}{t-z}, \tag{10}$$

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F^{(2)}(t)+4\mu\left(f^{(2)}(t)\right)'}{t-z}dt\right]dz, \tag{11}$$

სადაც C^0 ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივი ვექტორია.

ახლა (9), (10) და (11) ფორმულებიდან განსაზღვრულ $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ და $\psi(z)$ ვექტორ-ფუნქციების მნიშვნელობებს თუ გავითვალისწინებთ (2) ფორმულაში, მივიღებთ $(IV_*)^+$ სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნებს კვადრატურებში.

4^0. ანალოგიური მეთოდით შეიძლება ამოიხსნას $(III_*)^+$ სასაზღვრო ამოცანა.

ლიტერატურა:

მუსხელიშვილი 1982: მუსხელიშვილი ნ. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები, თბილისი, 1982.

Basheleishvili 1995: Basheleishvili M., Two-dimensional boundary value problems of statics of the theory of elastic mixtures. Mem. Differential Equations Math. Phys. 6, 1995.

Basheleishvili, Svanadze 2001: Basheleishvili M. and Svanadze K., A new method of solving the basic plane boundary value problems of statics of the elastic mixture theory. Georgian j. 8. N3, 2001.